Eléments de solutions pour un corrigé de l'épreuve de décembre 2005

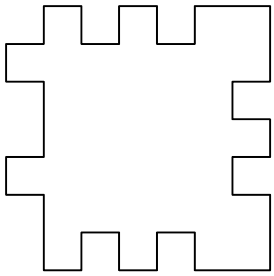
Exercice 1 : Graines de champions

Pour chaque enfant , on désigne le nombre de buts qu'il a marqués par l'initiale de son prénom, et on note N le nombre de buts marqués par celui qui raconte. On a alors les égalités ci-contre :
C'est donc Emile qui raconte, et on a le classement : $\boxed{\mathbf{E < A = B < D < C}}$

$A = N+3$
$C = D+3$
$C = A+5$
$B = N+3$

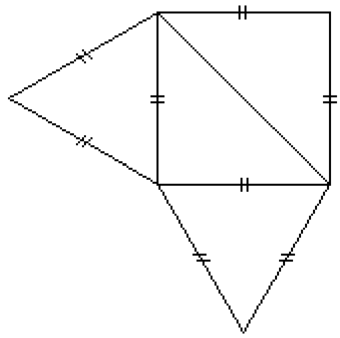
Barème proposé : Langue : 4 points, mathématiques : 3 points

Exercice 2 : Cube à crans



Barème proposé : -2 pts pour le 1^er côté faux ; -4 pts pour deux côtés faux ; 0 pt si 3 côtés faux ou tout faux.

Exercice 4 : Pas régulier



Voici un patron correct parmi d'autres.

Barème proposé :
Patron correctement agencé 5 pts maximum, (0 si faux).
Tenir compte du soin.

Exercice 3 : Près des 1000

Si on note x et y les nombres de pièces sur la longueur et sur la largeur, le nombre total de pièces de bords est $x + y + x + y - 4$ car il ne faut pas compter deux fois les coins. Donc $x + y = 64$.

x	y	xy
35	29	1015
36	28	1008
37	27	999
38	26	988

Le nombre de pièces du puzzle peut être 999 ou 1008.

Barème proposé : « $x + y = 64$ » 3 pts ; « $x \times y \approx 1000$ » 3 pts ; réponse 1 pt

Exercice 5 : La bonne combine

16 min 45 s = 1005 s La combinaison du cadenas est l'écriture en base 12 du nombre 1004 (= 1005-1) car le test 0-0-0 prend déjà une seconde. Or $1004 = 6\times12^2 + 11\times12 + 8$ donc **la combinaison du cadenas est** $\boxed{\mathbf{6 - 11 - 8}}$.

Barème proposé : 1 pt pour la conversion « 1005 s » ; 5 pts pour « 6-11-9 » ; 7 pts pour « 6-11-8 »

Exercice 6 : Platonique

Notons b la masse d'une boule métallique et t la masse d'une tige métallique (bâton métallique). La masse du tétraèdre donne l'équation $4b + 6t = 76$ et la masse de l'octaèdre donne $6b + 12t = 132$. On obtient donc le système $\begin{cases} 4b + 6t = 76 \\ 6b + 12t = 132 \end{cases}$ dont la solution est le couple $(b ; t) = (10 ; 6)$.

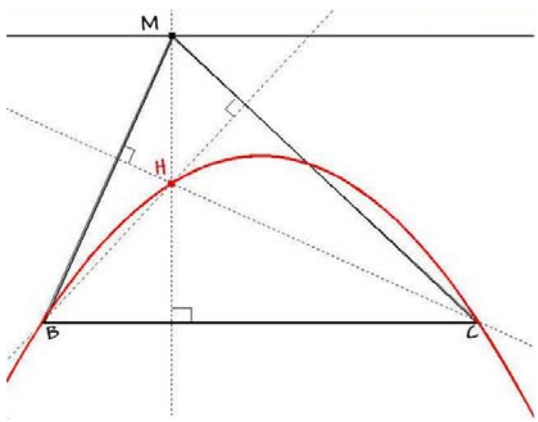
La masse de l'icosaèdre est $12b + 30t = 12 \times 10 + 30 \times 6 = 120 + 180 =$ **300 g**.

Barème proposé : 2 pts pour équations et système corrects » ; 2 pts pour solutions ; 1 pt pour calcul de la masse

Exercice 7 : Prendre de la hauteur

L'orthocentre décrit une parabole.
Cet exercice pourra être repris avec un logiciel de dessin géométrique.

Barème à l'appréciation du correcteur. (Tenir compte du soin, de la répartition des points, de la précision et du prolongement de la courbe au delà de B et C.)

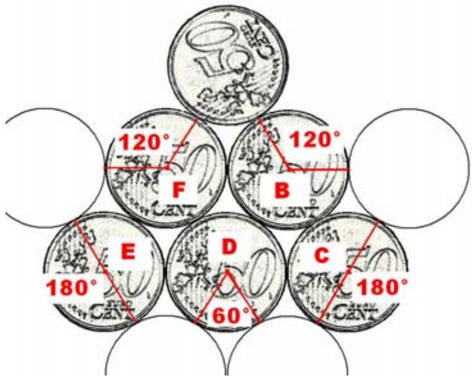


Exercice 8 : En piste !

En 1 heure, le télésiège dépose 900 skieurs en haut des pistes. Chacun des 150 sièges à 2 places passe donc 3 fois au sommet en une heure. Un aller-retour d'un siège dure donc 1/3 d'heure ou 20 minutes. **La durée d'une montée est de 10 minutes.**

Barème à l'appréciation du correcteur vu le grand nombre de méthodes possibles.

Exercice 9 : Euro-spin



Lorsque la pièce A roule sur une autre pièce et déplace son point de contact d'un angle α par rapport au centre de cette pièce, **elle tourne sur elle-même d'un angle double** 2α.

Dans son périple, la pièce A tourne de 120° autour de B, puis de 180° autour de C, de 60° autour de D, de 180° autour de E et de 120° autour de F.

L'angle de sa rotation propre sera donc de :

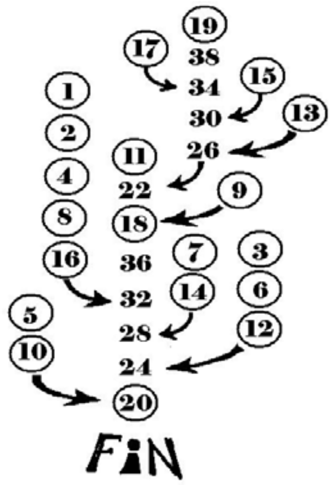
$2 \times (120°+180°+60°+180°+120°) = \boxed{\mathbf{1320°}}$

$= 3 \times 360° + 240°$

Le tout dans le sens des aiguilles de la montre.

Barème proposé : « angle double » 2 pts + calculs corrects 3 pts + dessin avec orientation correcte à l'arrivée 2 pts

Exercice 10 : C'est par où la sortie?



Si on entre un nombre n inférieur ou égal à 20, on le trouvera avec sa suite dans le « buisson » ci-contre.

Si on entre un nombre n supérieur à 20, on pourra considérer sa division euclidienne $\boldsymbol{n = 4q + r}$.

- Si $r = 0$, alors $n = 20 + 4(q-5)$ ainsi n sera réduit à 20 après $(q-5)$ passages dans la boucle de droite de l'organigramme
- Si $r = 1$, $r = 2$ ou $r = 3$, alors $n = (16 + r) + 4(q-4)$ et n sera réduit respectivement à 17, 18 ou 19 après $(q-4)$ passages dans la boucle de droite de l'organigramme. On trouvera alors la suite des calculs dans le buisson.

Conclusion : **Quelle que soit sa valeur initiale, *n* sera finalement réduit à 20 par ce programme de calcul**.

Barème proposé : 1 pt par test ; 1 pt pour « se termine toujours sur 20 » ; 6 pts pour explication (démonstration)

Exercice 11 : Le b.a.-ba du calcul

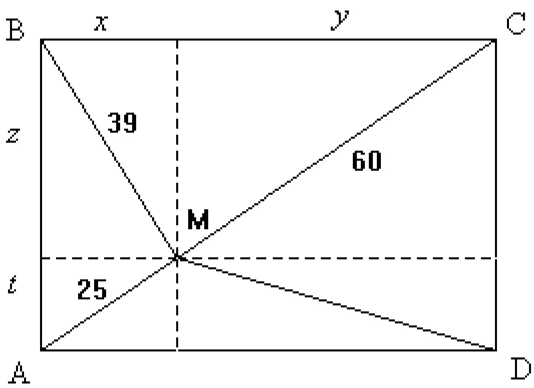
$(a + b) + ab + (a - b) = 2005 \Leftrightarrow 2a + ab = 2005 \Leftrightarrow a\,(2 + b) = 2005.$

Les seuls diviseurs de 2005 sont : 1 ; 5 ; 401 ; 2005.

Avec $a > b > 0$, la seule solution est $a = 401$ et $2+b = 5$, donc : $\boxed{\boldsymbol{a = 401 \text{ et } b = 3}}$

Barème proposé : 2 pts pour « $a(2+b) = 2005$ » ; 1 pt pour les diviseurs de 2005 ; 2 pts pour la conclusion

Exercice 12 : Oracle à distance



En appliquant le théorème de Pythagore dans quatre triangles rectangles, on obtient les relations suivantes :

$x^2 + z^2 = 39^2 = 1521$; $y^2 + z^2 = 60^2 = 3600$

$x^2 + t^2 = 25^2 = 625$; $y^2 + t^2 = MD^2$

En sommant membre à membre, on obtient :

$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2t^2 = MD^2 + 5746$

$2\,(x^2 + t^2 + y^2 + z^2) = MD^2 + 5746$

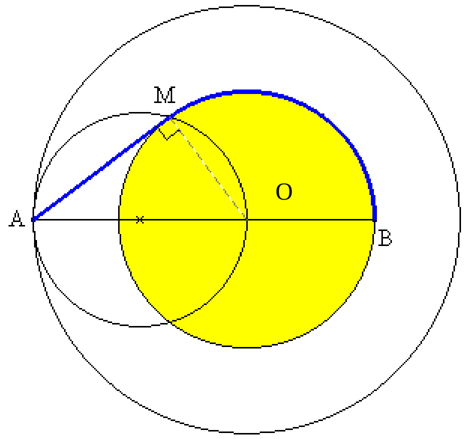
$2\,(625 + 3600) = MD^2 + 5746$

$MD^2 = 2 \times 4225 - 5746 = 2704$; $MD = \sqrt{2704} = 52$

La distance qui sépare le château du village D est de 52 km.

Barème proposé : 2 pts pour les 4 relations pythagoriciennes ; 3 pts pour la sommation ; 2 pts pour MD² puis MD

Exercice 13 : L'estomac dans les talons



La trajectoire la plus courte possible est le trajet AMB le long du segment AB puis de l'arc $\overset{\frown}{MB}$ où M est le point d'intersection du cercle de centre O passant par B avec le cercle de diamètre [AO].

Dans le triangle AMO, d'après le th. de Pythagore on a :

$AM^2 + OM^2 = AO^2$ soit AM = $\sqrt{75^2 - 45^2} = \sqrt{3600} = 60$ cm.

D'autre part, cos $\widehat{AOM} = \dfrac{OM}{AO} = \dfrac{45}{75}$ =0,6 soit

$\widehat{AOM} \approx 53{,}13°$.

$\widehat{MOB} = 180° - \widehat{AOM} \approx 180° - 53{,}13° \approx 126{,}87°$.

La longueur de l'arc $\overset{\frown}{MB}$ est environ égale à $\dfrac{126{,}87}{360} \times 2\pi \times 45 \approx 31{,}72\pi \approx 99{,}64$ cm.

La longueur du plus court chemin que pourrait emprunter l'escargot est environ 160 cm.

Barème proposé : 2 pts pour avoir trouvé le bon chemin (par un dessin ou une explication) ; 2 pts pour AM
2 pts pour la mesure de $\widehat{AOM}$; 1 pt pour $\widehat{MOB}$; 2 pts pour la longueur de l'arc $\overset{\frown}{MB}$; 1 pt pour 160 cm