Corrigé de l'épreuve d'entraînement de décembre 2001

Exercice 1 : Mots de têtes

La 1ère affirmation de Pierre Légaré est vraie : la négation des prévisions données par la météo sera vraie et donc fiable. On connaît donc, avec certitude, le temps qu'il ne fera pas.

Pour la 2ème proposition, sur un grand nombre de personnes, la proportion est presque juste mais elle ne l'est pas forcément sur un aussi petit échantillon.

Exercice 2 : Affaire de chiffres

Voici quelques solutions : 13 485 - 26 970 ; 14 853 - 29 706 ; 26 709 - 53 418 ; 32 709 - 65 418 ;
34 851 - 69 702 ; 48 513 - 97 026 et 48 531 - 97 062.

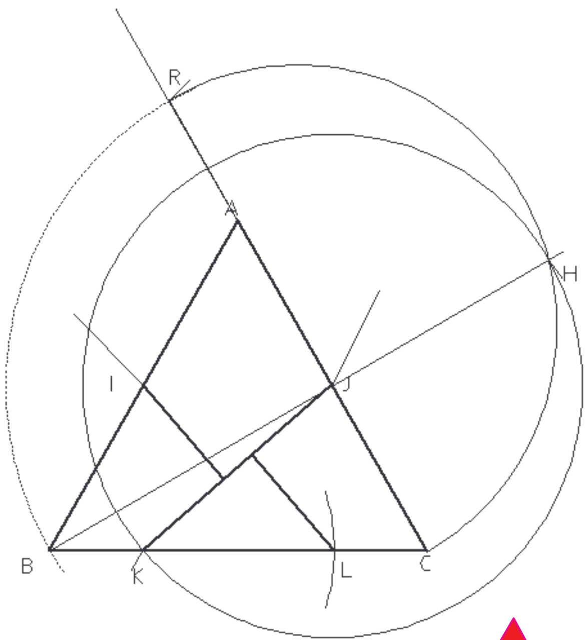
Exercice 3 : Des tresses

On compte pour chaque zone le nombre de triangles (ou demi-triangles) équilatéraux de côté 2 cm qu'elle contient.

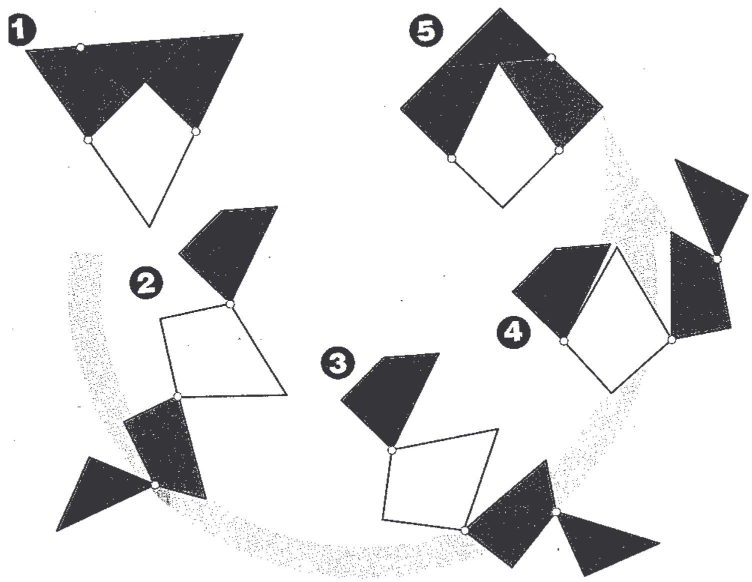
Quand la tresse a une longueur égale à $3 \times$ la hauteur **d'un tel** triangle, chaque couleur occupe une surface équivalente à 3 triangles (sur chaque face de la tresse).

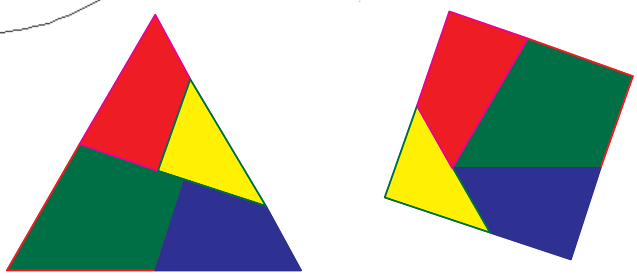
On continue la tresse jusqu'à atteindre une longeur triple de celle-ci car $9\sqrt{3} \approx 15{,}59 > 15$ cm.

Exercice 4 : Métamorphose



Remarque :
On peut en faire un puzzle articulé. (voir ci-dessous).



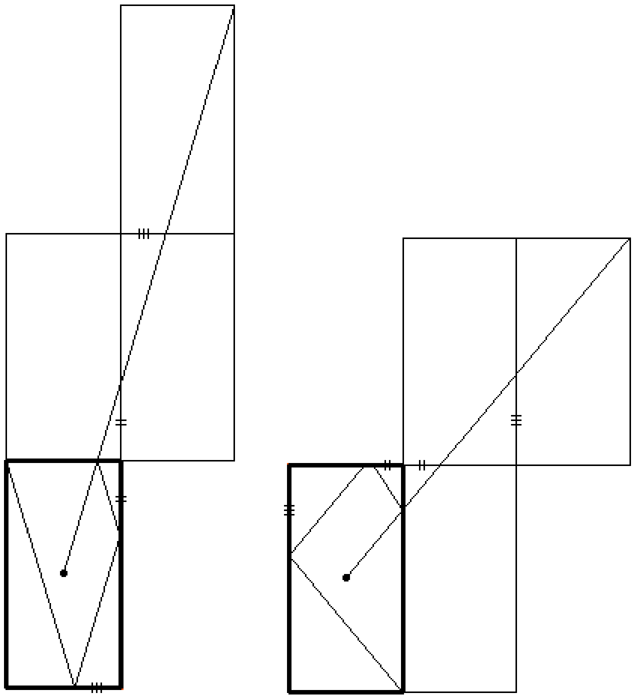


Exercice 5 : Qui est chocolat ?

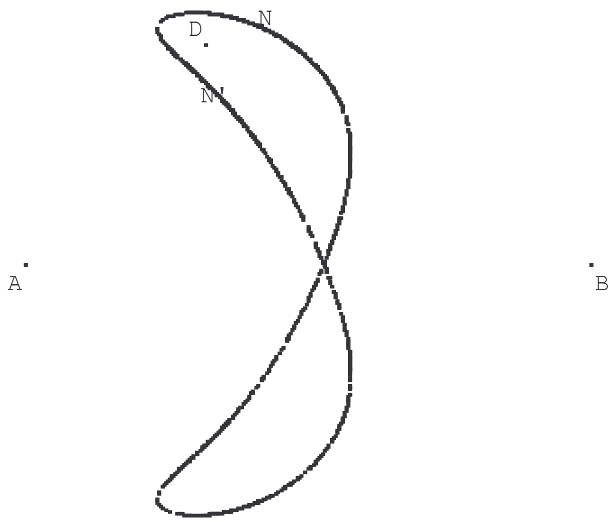
La stratégie de Jacques est la « stratégie du carré » : à chaque fois il laisse à Germain un morceau carré. Pour commencer, il lui laisse un carré 4×4 puis, selon le cas, un carré 3×3, 2×2 ou 1×1 (si la gourmandise l'emporte chez Germain…). Dans tous les cas le dernier carreau échoit à Germain.

Exercice 6 : Jeu réfléchi

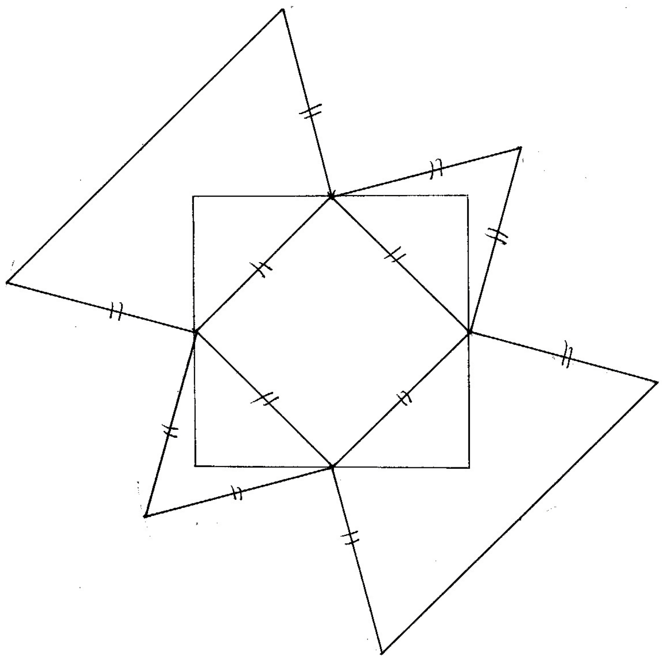
C'est un jeu de réflexions: on peut procéder par composition de symétries.
Voici deux solutions...les autres s'obtiennent par symétries à partir de celles-ci.

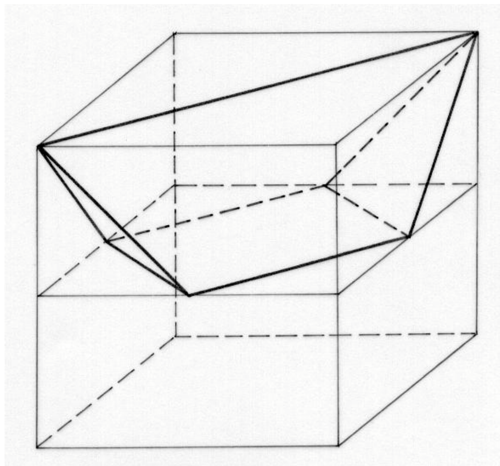


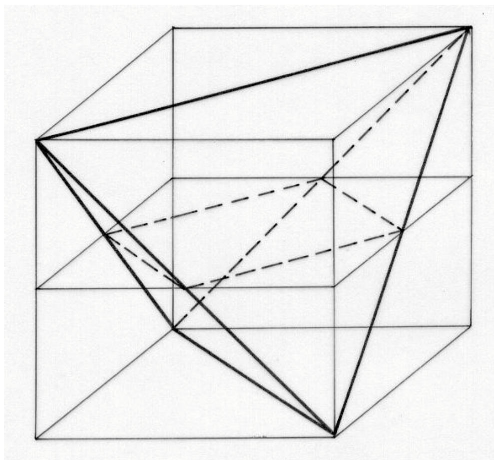
Exercice 7 : Courbographe



Exercice 8 : C Kdo







Exercice 9 : Clés-barres

2 chiffres voisins notés a et b donnent le même chiffre de contrôle lorsqu'ils sont permutés. Cela signifie que : $a \times 1 + b \times 3 = a \times 3 + b \times 1 + 10k$ avec k entier relatif.
Soit plus simplement $2b = 2a + 10k$ c'est à dire $\boldsymbol{b = a + 5k}$.

- $k = 0$: correspond au cas trivial $a = b$.
- $k = 1$ ou $k = -1$ donnent respectivement $b = a + 5$ ou $a = b + 5$.
- les autres cas tels que $k = 2$ sont impossibles car a et b sont des chiffres.

Les paires cherchées sont donc : **0 et 5 ; 1 et 6 ; 2 et 7 ; 3 et 8 ; 4 et 9**
ainsi que les couples **0 et 0 ; 1 et 1 ; 2 et 2 ; 3 et 3 ; 4 et 4 ; 5 et 5 ; 6 et 6 ; 7 et 7 ; 8 et 8 ; 9 et 9**.

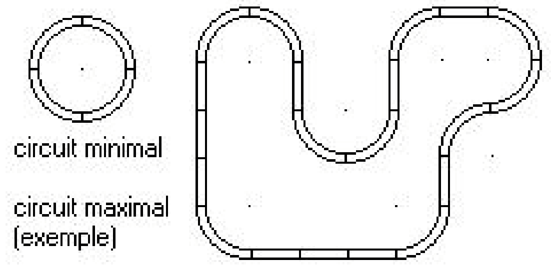
Exercice 10 : Court-circuit

Circuit minimal : différence : $40\pi - 30\pi =$ **10π** cm.

Circuit maximal : différence : $(70\pi + 22{,}5\pi + 175) - (52{,}5\pi + 30\pi + 175) =$ **10π** cm.

Soit un autre circuit comportant, dans le sens de parcours, m courbes à droite, n courbes à gauche et p rails droits. On appellera Nord l'orientation de la voiture au départ.
Le circuit ne peut se refermer que si **m = n + 4 ou n = m + 4** car la voiture doit retrouver l'orientation Nord après avoir fait un tour complet. Les rails droits n'induisent aucune différence sur les longueurs des deux pistes. Les courbes à droite et à gauche peuvent se compenser deux à deux.

Il reste une différence de longueur de : **$4 \times (20\pi/2 - 15\pi/2) = 10\pi$** cm **indépendamment du circuit**.



(Barème possible: 2 + 4 + 4)

Exercice 11 : Le temps s'écoule

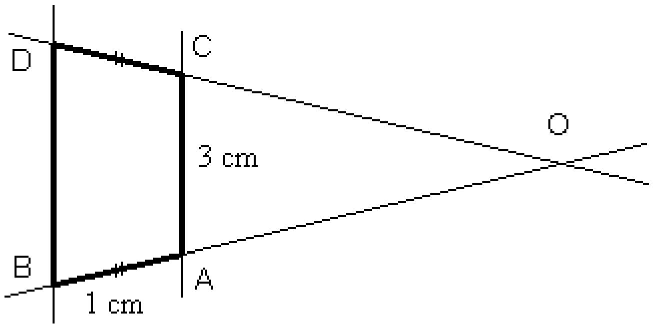
Si on ouvre simultanément les 2 robinets d'un récipient alors le débit est : 1/30+1/60=1/20 en récipient par minute ; les 2 robinets mettent donc 20 min pour vider un récipient.

1° solution :
- on ouvre en même temps les 2 robinets d'un récipient,
- quand il est vide on ouvre les 2 robinets de l'autre,
- ce 2° récipient est vide 40 min après le début de l'expérience.

2° solution :
- on ouvre simultanément le grand robinet du récipient 1 et le petit de l'autre,
- au bout de 30 min le récipient 1 est vide et le récipient 2 est encore à moitié plein ; on ouvre alors le grand robinet de ce récipient : les 2 robinets mettent 10 min pour le vider. Et 30+10=40.

Exercice 12 : Tour-bouchon

1ère solution : (avec le théorème de Thalès)



Soit [AB] le segment suivant lequel le bouchon est en contact avec la table ; le plan perpendiculaire à la table et contenant (AB) coupe le bouchon suivant le trapèze ABDC. O désigne le centre de la couronne. D'après le théorème de Thalès on a : $\frac{OA}{OB} = \frac{AC}{BD}$ soit $\frac{30}{31} = \frac{3}{BD}$ et BD = 3,1 cm.

2ème solution : (avec les périmètres)

La circonférence du « haut » du bouchon est : 3π cm. Ce « haut » du bouchon décrit une courbe circulaire de longueur 60π cm. Le bouchon fait donc $\frac{60\pi}{3\pi}$ = 20 tours complets.

Le « bas » du bouchon fait aussi 20 tours sur un cercle de 31 cm de rayon, donc de longueur 62π cm. Donc la circonférence du « bas » du bouchon est $\frac{62\pi}{20} = 3{,}1\pi$ cm. Le grand diamètre du bouchon est donc 3,1cm.

Exercice 13 : Table de carrés

On peut compter les carreaux par colonnes :
Il y a n colonnes présentant une alternance de noirs et de rayés.
Chacune compte n noirs et n + 1 rayés ; soit n² carreaux noirs n x (n + 1) rayés dans ces colonnes-ci.

Il y a n + 1 colonnes présentant une alternance de blancs et de rayés.
Chacune compte n + 1 blancs et n rayés ; soit (n + 1)² carreaux blancs et (n + 1) x n rayés dans celles-là.

En tout, on compte donc: **n² + 2n + 1 blancs, n² noirs et 2n² + 2n rayés**.

Total pour vérification: n² + 2n + 1 + n² + 2n² +2n = 4n² + 4n + 1 = **(2n + 1)².**