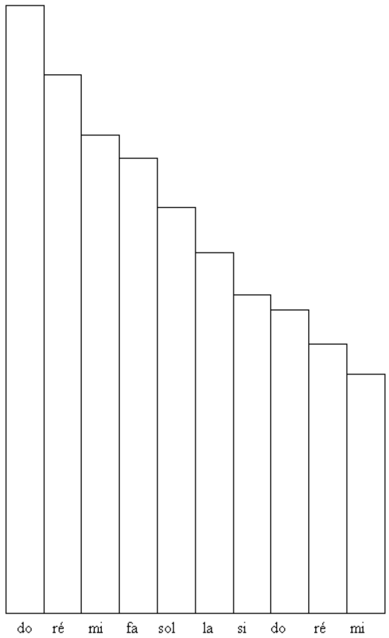
Corrigé de l'épreuve d'entraînement de décembre 2000

Exercice 1 : Jetons un œil

Geneviève retourne le jeton qui se trouve au milieu de la rangée (le 13ème) : il indique le nombre de jetons déplacés par Anne.
Explication : Une fois qu'Anne a posé les 25 jetons, le 13ème jeton a pour valeur 0.
Si elle en ramène 1 à gauche, celui du milieu est décalé d'un rang et a pour valeur 1 ;
Si elle en ramène 2 à gauche, celui du milieu est décalé de 2 rangs et a pour valeur 2 ;
etc...
Si Anne déplace n jetons ($n \leq 12$) alors le jeton du milieu aura pour valeur n.



La flûte d'Aurélie à l'échelle 1/2.

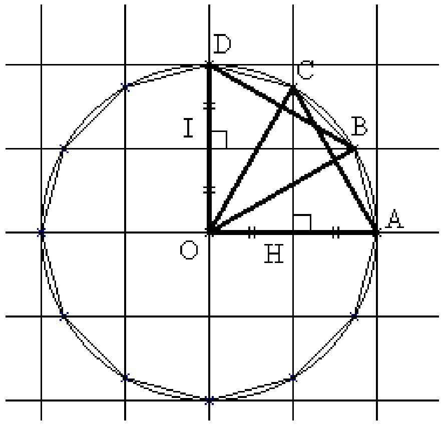
Exercice 2 : Pas facile à ...

Le calcul se fait en suivant l'ordre « do - sol - ré 2 - ré - la - mi 2 - mi - si »
et « do - do 2 - fa ».

do	ré	mi	fa	sol	la	si	do 2	ré 2	mi 2
16	$\frac{128}{9}$ $\approx 14{,}2$	$\frac{1024}{81}$ $\approx 12{,}6$	12	$\frac{32}{3}$ $\approx 10{,}7$	$\frac{256}{27}$ $\approx 9{,}5$	$\frac{2048}{243}$ $\approx 8{,}4$	8	$\frac{64}{9}$ $\approx 7{,}1$	$\frac{512}{81}$ $\approx 6{,}3$

En partant de 16 cm pour do, pour une flûte plus grande, on obtient 0,125 cm pour la 7e octave ($16 \times 0{,}5^7$) mais 0,1233 cm par 12 quintes ($16 \times (2/3)^{12}$).
Les calculs peuvent donc conduire à des différences de mesures qui seront invisibles sur le dessin. En effet, mathématiquement aucune puissance de 2 n'est une puissance de 3 et vice-versa. Cette méthode de construction des fréquences et donc des longueurs d'ondes est attribuée à Pythagore.

Exercice 3 : Une douzaine



Le triangle AOC est équilatéral : en effet CO = CA (car (CH) est la médiatrice de [OA]) et OA = OC (= rayon).

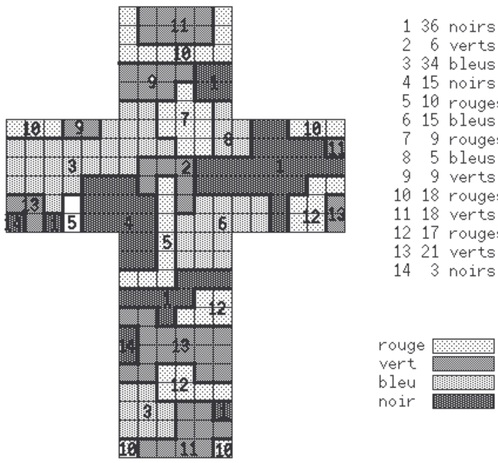
De même le triangle OBD est équilatéral et [BI] est la bissectrice de $\widehat{OBD}$.
D'où $\widehat{IBO} = 30°$ et $\widehat{BOA} = 90° - \widehat{BOD} = 90° - 60° = 30°$.

Par conséquent $\widehat{BOC} = \widehat{COD} = 30°$ en utilisant les triangles équilatéraux OAC et OBD.
Idem pour les trois autres quarts de cercles.
Le dodécagone est inscrit dans un cercle avec tous les angles au centre de 30° : il est régulier.

Remarque : il y a d'autres solutions notamment en passant par la trigonométrie.

Exercice 4 : Cuboloriage

Le cube compte en tout $6^3 = 216$ carrés. Il faut 4 couleurs, coloriant chacune 54 carrés de la manière suivante :



Exercice 5 : Le 8ème degré

$$1 \xrightarrow{\times 2} 2 \xrightarrow{+1} 3 \xrightarrow{\times 2} 6 \xrightarrow{\times 2} 12 \xrightarrow{-1} 11 \xrightarrow{\times 2} 22 \xrightarrow{\times 2} 44$$

$$1 \xrightarrow{\times 2} 2 \xrightarrow{\times 2} 4 \xrightarrow{\times 2} 8 \xrightarrow{\times 2} 16 \xrightarrow{\times 2} 32 \xrightarrow{\times 2} 64 \xrightarrow{-1} 63$$

$$1 \xrightarrow{\times 2} 2 \xrightarrow{\times 2} 4 \xrightarrow{\times 2} 8 \xrightarrow{+1} 9 \xrightarrow{\times 2} 18 \xrightarrow{\times 2} 36 \xrightarrow{\times 2} 72$$

Exercice 9 : Comptes suisses

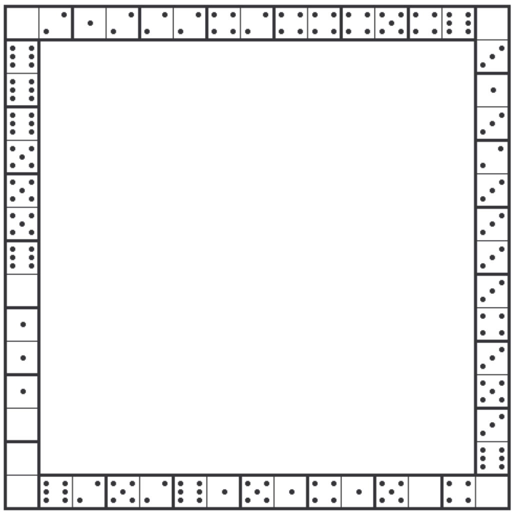
Voici deux exemples :
7 - 72 - 372 - 3724 - 37245 - 372456 - 3724560 - 13724560 - 813724560 - 9813724560
et 1 - 12 - 312 - 7312 - 73125 - 731256 - 7312564 - 73125648 - 731256489 - 7312564890

Remarque :
Une variante de cet exercice consiste à rajouter le chiffre suivant toujours à gauche.
C'est plus dur et plus long et il n'y a qu'une seule solution mais c'est très intéressant, essayez.

Solution de la variante : 3816547290.

Exercice 6 : Dominos magiques

Voici une solution parmi d'autres :



Exercice 7 : Fractale de poumon

Calcul d'un angle à la base des triangles isocèles :

$\widehat{AOC} + \widehat{COB} = \widehat{AOB} = 180°$

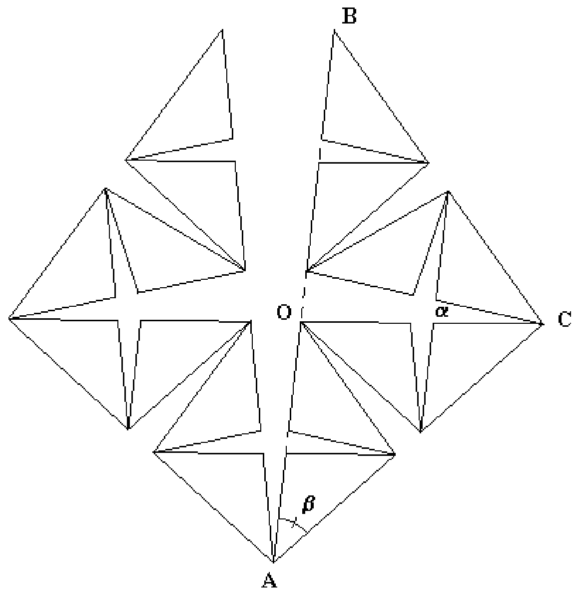
or $\widehat{AOC} = 180° - 2\beta$ et $\widehat{COB} = 180° - (2\beta + \alpha)$

donc $180° - 2\beta + 180° - (2\beta + \alpha) = 180°$

en simplifiant $180° - 4\beta - \alpha = 0$

d'où $\beta = \dfrac{180 - \alpha}{4} = 45 - \dfrac{\alpha}{4} = 45 - \dfrac{12}{4} = 45 - 3 = 42°$.

L'angle obtus des triangles isocèles mesure $180° - 2 \times 42 = 180° - 84° = 96°$.



Exercice 8 : Le bogue

Les nombres de 2 chiffres donnent généralement 11 de plus qu'eux-mêmes, sauf les nombres finissant par 9 (1 de plus) ou commençant par 9 (89 de moins), et 99 qui donne 99 de moins. Deux possibilités parmi d'autres :

$10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 99 = 189$

$21 + 21 + 21 + 21 + 21 + 21 + 21 + 21 + 21 + 00 = 189$.

$19 + 19 + 19 + 19 + 19 + 19 + 19 + 19 + 19 + 9 = 180$

$20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 0 = 180$.

Exercice 10 : À l'extérieur

Un triangle isocèle retourné ferme son trou. Dans le triangle rectangle, il suffit donc de découper suivant la médiane relative à l'hypoténuse et de retourner les 2 triangles isocèles obtenus.

Dans un triangle quelconque, on trace une hauteur (non extérieure au triangle si le triangle est obtusangle : c'est à dire s'il a un angle obtus) et on applique la méthode du triangle rectangle 2 fois.

Remarques :
* *Pour les triangles non-obtusangles (3 angles aigus), on peut aussi utiliser les médiatrices. Les 3 sommets et le centre du cercle circonscrit forment 3 triangles isocèles qu'il suffit de découper et de retourner.*
* *Une dernière méthode valable pour tous les triangles : construire le cercle inscrit. Les trois quadrilatères formés par un sommet, le centre du cercle inscrit et 2 points de contact sont retournables car ils ont un axe de symétrie.*

Exercice 11 : Problème de poids

Le sac de blé de 4 pieds de hauteur et de 6 pieds de tour a pour volume : $4 \times \left(\dfrac{6}{2\pi}\right)^2 \times \pi = \dfrac{36}{\pi}$ en "*pieds cubes*".

Les 2 autres sacs de 4 pieds de hauteur et de 3 pieds de tour ont un volume total de : $2 \times 4 \times \left(\dfrac{3}{2\pi}\right)^2 \times \pi = \dfrac{18}{\pi}$ en "*pieds cubes*".

Donc deux sacs ont un volume total qui est la moitié de celui du grand sac. Ceci explique le geste du mousquetaire Jacques.

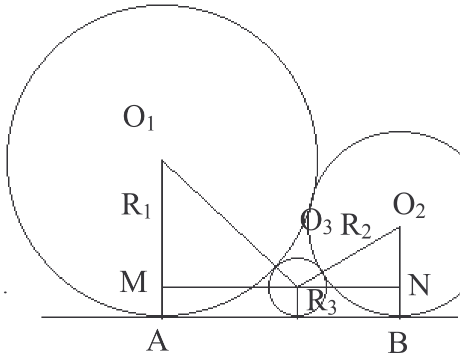
Exercice 12 : Made in Japan

Le théorème de Pythagore, appliqué aux triangles rectangles O_1MO_3 et O_2NO_3, donne :

$O_3M^2 = O_1O_3^2 - O_1M^2 = (9 + R_3)^2 - (9 - R_3)^2 = 36\,R_3$ soit $O_3M = 6\sqrt{R_3}$.

De même, $O_3N = 4\sqrt{R_3}$. Comme $O_3M + O_3N = AB$, on obtient : $10\sqrt{R_3} = 12$

soit $\sqrt{R_3} = 1{,}2$ et $R_3 = 1{,}44$ cm. *Plus généralement, on a :* $\dfrac{1}{\sqrt{R_2}} + \dfrac{1}{\sqrt{R_1}} = \dfrac{1}{\sqrt{R_3}}$.



Remarque : Une variante consiste à ne pas donner AB et de faire démontrer que $AB = 2\sqrt{R_1R_2}$.

Exercice 13 : C'est puissant

$2000^{30} = (2 \times 10^3)^{30} = 2^{30} \times 10^{90} = 1\,073\,741\,824 \times 10^{90}$ donc 2000^{30} a 100 chiffres.

$2000^{302} = 2^{302} \times 10^{906} \approx 8{,}148 * 10^{90} \times 10^{906} \approx 8{,}148 \times 10^{996}$ donc 2000^{302} a 997 chiffres.

$2000^{303} = 2^{303} \times 10^{909} \approx 1{,}6296 * 10^{91} \times 10^{909} \approx 1{,}6296 \times 10^{1000}$ donc 2000^{303} a 1 001 chiffres.

Il n'existe aucune puissance de 2000 avec 1000 chiffres.