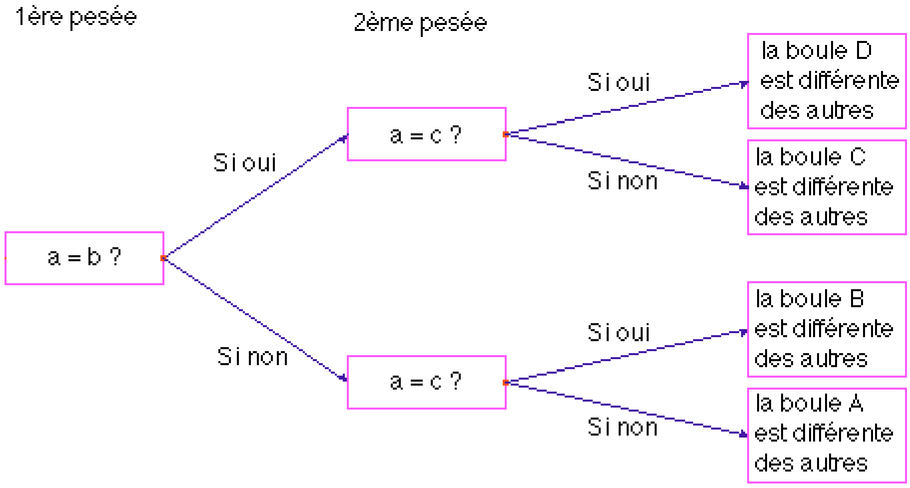
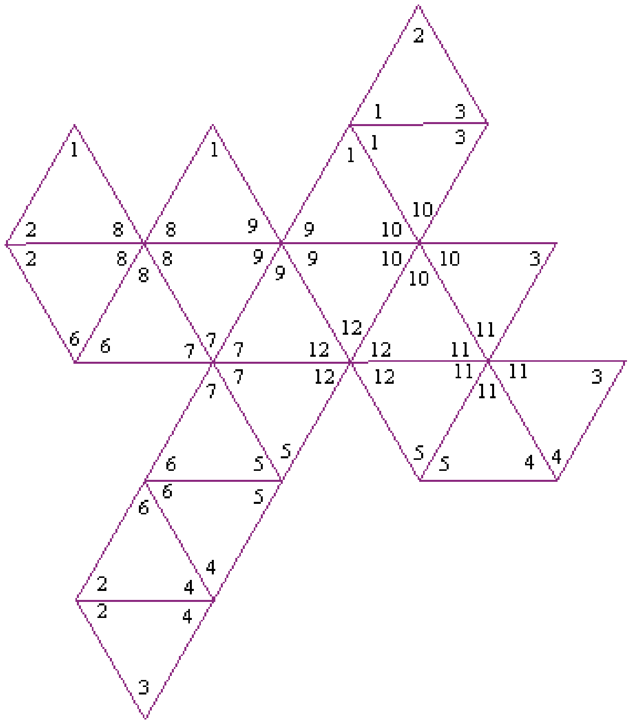
Correction de l'épreuve d'entraînement de Maths Sans Frontières

Exercice 1

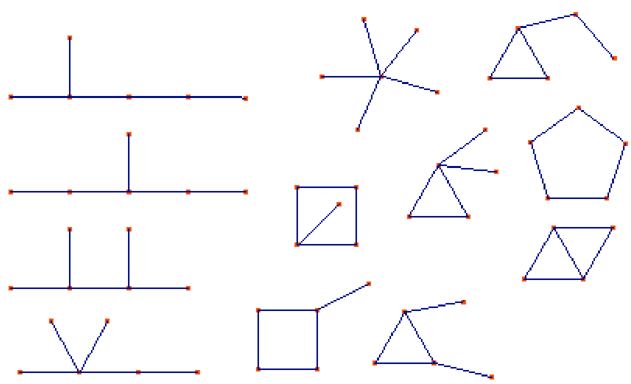
Notons *a*, *b*, *c* et *d* les masses des boules A, B, C et D. Les deux pesées peuvent se résumer ainsi :





Exercice 3

On peut réaliser 13 figures différentes :



Exercice 4

Le premier texte parle de **Pythagore** et le deuxième texte parle du nombre **π (pi)**.

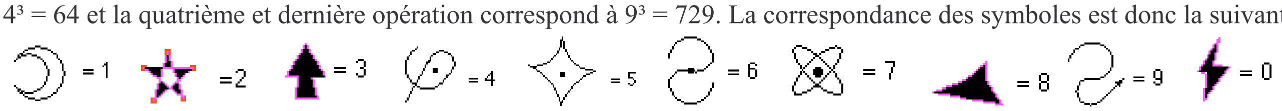
Merci de bien vouloir, pour cet exercice 4, transmettre les productions des élèves !

Exercice 5

Il faut jouer en commençant par le **20 janvier** puis passer au 21 février, 22 mars, 23 avril, 24 mai, 25 juin, 26 juillet, 27 août, 28 septembre, 29 octobre, 30 novembre et enfin 31 décembre.

Exercice 6

La première opération correspond à $7^3 = 343$, la deuxième opération correspond à $8^3 = 512$, la troisième opération correspond à $4^3 = 64$ et la quatrième et dernière opération correspond à $9^3 = 729$. La correspondance des symboles est donc la suivante :



Exercice 7

En partant de Buenos Aires, pour arriver à la latitude de Paris, il faut environ 30 minutes (on compte 45 points entre 2 passages successifs à l'équateur d'où 90-91 points pour 91 minutes soit 1 point par minute). Ensuite Mir doit faire encore un tour complet autour de la terre pour arriver sur le méridien de Paris. En tout Mir mettra donc 30 + 91 = 121 minutes soit environ 2 heures.

Mir survolera donc la France vers 12h 23 min – 12h 24 min.

Remarque : « Mir » signifie « paix » en russe.

Exercice 9

Le premier cube collé présente 5 faces visibles. Si le cube suivant est aussi collé à la table, le nombre de faces visible augmente de 3. S'il n'est pas collé à la table, le nombre de faces visibles augmente de 4. Et ainsi de suite.

Notons x le nombre de cubes du premier type et y celui du second type; on doit avoir $5 + 3x + 4y = 30$ soit $3x + 4y = 25$.

On trouve les **deux solutions**: $x = 7$ et $y = 1$ ce qui correspond à **un total de 9 cubes** dont 8 (=7+1) collés sur la table (figure 1)

et $x = 3$ et $y = 4$ ce qui correspond à **un total de 8 cubes** dont 4 (=3+1) collés sur la table (figure 2).

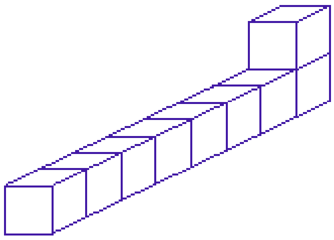


figure 1

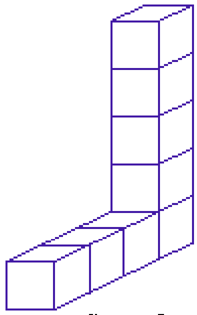


figure 2

Exercice 8

		1	8	6
	7	5	3	
4	2	9		

Exercice 10

On a BD' = $x + y$ (diamètre) donc OE = $\frac{x+y}{2}$ (rayon). OA = OD' – AD' = $\frac{x+y}{2} - y = \frac{x-y}{2}$.

Dans le triangle OAE rectangle en A, AE² = OE² – OA² = $\frac{(x+y)^2}{4} - \frac{(x-y)^2}{4} = \frac{4xy}{4} = xy$

Comme AE² est l'aire du carré AGFE et xy est celle du rectangle ABCD, on a bien $Aire_{ABCD} = Aire_{AGFE}$.

Exercice 11

Le volume d'une boule inscrite dans un cylindre (boule tangente aux bases du cylindre et à la surface latérale) est égal aux $\frac{2}{3}$ du volume du cylindre. Volume cylindre = aire de la base × hauteur = $\pi R^2 \times 2R = 2\pi R^3$; Volume boule = $\frac{4\pi R^3}{3}$

On a bien *Volume boule* = $\mathbf{\frac{2}{3}}$ × **Volume cylindre** en effet $\frac{2}{3} \times 2\pi R^3 = \frac{4\pi R^3}{3}$. (Propriété découverte par Archimède)

Il existe une autre solution : L'aire de la boule est égale aux $\frac{2}{3}$ de l'aire totale du cylindre. En effet : Aire boule = $4\pi R^2$

Aire totale du cylindre = aire des 2 bases + aire de la surface latérale = $2 \times \pi R^2 + 2\pi R \times 2R = 2\pi R^2 + 4\pi R^2 = 6\pi R^2$

On a bien *Aire boule* = $\mathbf{\frac{2}{3}}$ × **Aire cylindre** en effet $\frac{2}{3} \times 6\pi R^2 = 4\pi R^2$.

Anecdote : Cette propriété découverte et démontrée par Archimède sur les volumes lui plut tellement qu'il a demandé que la figure correspondante soit gravée sur sa tombe ; ce qui a été fait en 212 avant J.-C. sur ordre du général Marcellus. Et c'est ce qui permit au grand Cicéron, plus d'un siècle plus tard, de retrouver cette tombe oubliée de tous.

Exercice 12

Affirmation de Camille : L'hypoténuse du triangle de droite mesure $\sqrt{(25^2+20^2)} = \sqrt{1025}$.

Méthode de David : On admet que les accroissements de x et x^2 sont proportionnels (cf. interpolation linéaire)

÷65

accroissement de x	33 – 32 = 1	1/65
accroissement de x^2	1089 – 1024 = 65	1025 – 1024 = 1

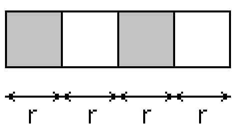
÷65

Comme $\sqrt{1024} = 32$, on a donc $\sqrt{1025} \approx 32\ 1/65$.

Exercice 13

* En échangeant les parts de vanille et de chocolat des 2 couches supérieures on se ramène à une couche de vanille et à une de chocolat : il y a donc autant de vanille que de chocolat sur les 2 couches supérieures.

* Il reste à comparer les volumes de pâte à la vanille et au chocolat sur la couche inférieure.



Il suffit de comparer les aires des bases des parties chocolat et vanille.

Pour la vanille : $\pi r^2 + \pi(9r^2 - 4r^2) = 6\pi r^2$

Pour le chocolat : $\pi(4r^2 - r^2) + \pi(16r^2 - 9r^2) = 10\pi r^2$

Le gâteau comporte donc plus de chocolat que de vanille : **Gaston a tort**.