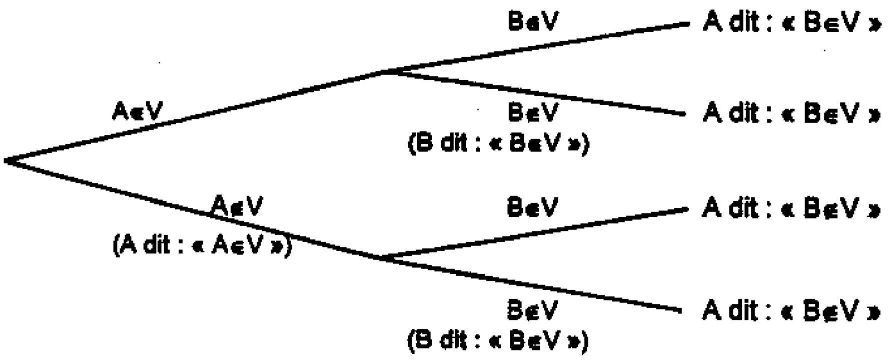
MATHEMATIQUES SANS FRONTIERES
Indications de solutions pour l'épreuve d'entraînement de décembre 1996

Exercice 1 — Le détecteur de mensonges

Appelons A le premier habitant rencontré, B l'autochtone et V l'ensemble des « diseurs de vérité ».
On a les éventualités suivantes :



A ayant dit « B∈V », nous sommes dans l'un des premiers cas. Donc A∈V et **le voyageur peut faire confiance à A, premier habitant rencontré.**

Exercice 2 — En bonne estime

Chaque motif intérieur à la mosaïque, c'est à dire n'apparaissant pas sur son bord, utilise un hexagone, six carrés et six triangles équilatéraux.
Chaque carré est commun à deux motifs et chaque triangle est commun à trois motifs.
Pour 1200 hexagones, il faudra donc compter :

$$\frac{1200\text{x}6}{2} = 3600 \text{ carrés} \quad \text{et} \quad \frac{1200\text{x}6}{3} = 2400 \text{ triangles.}$$

Ce résultat est approximatif, car le calcul suppose que tous les motifs sont intérieurs. En réalité, le majordome sera conduit à majorer les nombres précédents s'il tient compte des motifs bordant la mosaïque.

Exercice 3 — Passer au vert

Le premier réservoir cylindrique formé par M. Laverdure a pour base un cercle de circonférence y et de hauteur x, de contenance $V_1 = \pi\, x(\frac{y}{2\pi})^2 = \frac{xy^2}{4\pi}$ (x et y en mètres).

Le deuxième réservoir cylindrique obtenu en échangeant x et y, a pour contenance $V_2 = \frac{x^2 y}{4\pi}$.

Comme V_2 est supérieur de 20 % à V_1, on a : $V_2 = V_1(1 + \frac{20}{100}) = 1{,}2\, V_1$ donc $\frac{V_2}{V_1} = 1{,}2$ et $\frac{x}{y} = 1{,}2$. En résolvant $\begin{cases} x\,y = 2{,}70 \\ x = 1{,}2\, y \end{cases}$ on trouve : $1{,}2\, y^2 = 2{,}70$ puis $y^2 = 2{,}25$.

On obtient : $y = 1{,}5$ m et $x = 1{,}8$ m. Donc le nouveau volume cherché est :

$$V_2 = \frac{1{,}8^2 \times 1{,}5}{4\pi} = \frac{1{,}215}{\pi}\ \text{m}^3 \approx 386{,}75\ \text{dm}^3.$$